

# EL CÀLCUL DIFERENCIAL A LA FRANÇA DEL SEGLE XVIII A TRAVÉS DE L'ANÀLISI DE LLIBRES DE TEXT

**Mónica Blanco Abellán**

Centre d'Estudis d'Història de les Ciències. Universitat Autònoma de Barcelona

Institut für Didaktik der Mathematik. Universitat de Bielefeld

Escola Universitària d'Enginyeria Tècnica Agrícola de Barcelona. Departament Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya

Paraules clau: *càlcul diferencial, França al segle XVIII, anàlisi de llibres de text.*

Differential Calculus through Textbook Analysis in eighteenth-century France

Summary: *In 1696 L'Hôpital published the Analyse des infiniment petits, the first systematic treatise on differential calculus. However, some other textbooks on calculus appeared in France in the XVIIIth century. The aim of this study is to analyse a number of these works. There is a revision of the factors which fostered their reading. The form and content of these textbooks are analysed and compared. The main differences which have been assessed between these texts are: (i) the way they present the foundations of Calculus; (ii) whether the language they use is geometrical or algebraical; (iii) the way they treat algebraical and transcendental curves; (iv) the criteria for choosing coordinates; (v) the problems and applications they treat.*

Key words: *differential calculus, eighteenth-century France, textbook analysis.*

## Introducció

El present treball és part de la tesi doctoral que realitzo sota la supervisió del doctor Josep Pla i Carrera (Universitat de Barcelona) dins del programa de doctorat d'història de les ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona i amb el suport del doctor Gert Schubring de la Universitat de Bielefeld. Schubring recolza l'anàlisi comparativa de llibres de text com a forma d'exploració de les diferències entre països pel que fa a estil, significat i epistemologia, donat que els llibres de text emergeixen d'un marc cultural matemàtic específic i d'un determinat sistema educatiu (Schubring, 1996). L'objectiu del meu treball és dur a terme una anàlisi comparativa d'alguns llibres de text sobre càlcul diferencial publicats a França durant el segle XVIII.

Alguns dels sistemes educatius francesos del segle XVIII foren:

- *Collèges*, dirigits per ordres religioses, on les matemàtiques tenien un rol marginal.
- *Écoles militaires*, establertes cap al 1750, que tenien caràcter matematicofísic.
- *École Polytechnique*, establerta el 1794, que preparava els enginyers militar i civils i que engegà el procés d'elementarització matemàtica (per via de la publicació de *livres élémentaires*).

Els llibres de text sobre càlcul diferencial a la França del segle XVIII que he analitzat i comparat són:

- *Analyse des infiniment petits* del Marquès de L'Hôpital (1696), primer llibre de text sistemàtic sobre càlcul diferencial.
- *Analyse démontrée...* de Charles René Reyneau (1708), l'elaboració del qual fou motivada per Malebranche per ensenyar les noves matemàtiques de finals del segle XVII.
- *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie* d'Étienne Bézout (1799-1800). És una de les diverses reedicions que es feren fins el 1800 del *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* (1764-1769). Està adreçat als alumnes de les *écoles militaires* i als candidats a l'*École Polytechnique*.
- *Leçons sur le calcul des fonctions* de Joseph Louis Lagrange (1800), *livre élémentaire* basat en la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange (1797).
- *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Sylvestre François Lacroix (1802), *livre élémentaire* basat en el *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix (1797-1800).

Com exposen els fonaments?

L'element bàsic en L'Hôpital, Reyneau i Bézout és la *diferència* (quantitat infinitament petita en què una quantitat variable creix o decreix). Reyneau, possiblement com a conseqüència del debat Rolle-Varignon (1700-1701), intenta justificar l'existència dels infinitament petits, basant-se en la geometria grega. Quant a l'ordre superior, tots tres parlen de diferència de la diferència. Reyneau justifica l'existència de diferències d'ordre superior mitjançant progressions geomètriques i moviment. L'Hôpital i Reyneau defensen la indeterminació de la progressió, com Leibniz, com un fet que demostra la generalitat del nou càlcul. Per la seva banda, Lagrange i Lacroix treballen amb *funcions*. De, Lacroix defineix la *diferència* com l'increment funcional  $f(x+h)-f(x)$  i el *diferencial* com el primer terme de la diferència. Els elements bàsics de Lagrange, les *funcions derivades*, són els coeficients obtinguts en desenvolupar en sèrie de potències una funció. L'objecte central per a Lacroix és el *coeficient diferencial*, el límit (entès en el sentit de D'Alembert) de la raó dels increments simultanis d'una funció i de la variable de la qual depèn. Donat que el coeficient diferencial és una funció, es pot trobar el seu coeficient diferencial, amb la qual cosa l'ordre superior queda justificat. Per a L'Hôpital, Reyneau i Bézout, seguint la geometria grega, una corba és un polígon d'infinits costats infinitament petits i, en conseqüència, la *tangent* és la prolongació d'un costat del polígon-corba. Es calcula a partir del triangle característic. Lacroix entén la

corba com a *límit* dels polígons inscrits i circumscrits a la corba i la tangent és el límit de les rectes secants, que es pot calcular a partir del coeficient diferencial. Lagrange intenta allunyar-se de tota justificació geomètrica i parla de la tangent com de la recta que presenta un punt comú amb la corba, de manera que no existeix cap altra recta pel mateix punt entre la corba i la recta tangent. Es troba calculant el desenvolupament en sèrie de potències de la funció, fins a primer grau.

<b>Elecció de coordenades i tractament de les corbes algèbriques i transcendentals</b>		
	<b>Corbes</b>	<b>Coordenades</b>
L'Hôpital	– Algèbriques. Concoide, cissoide – Cicloide, quadratriu, espiral, corba logarítmica	Segons naturalesa de la corba (adiant per a les transcendentals), procediment usual del segle XVII
Reyneau	– Algèbriques – Cicloide – Logarítmica, de la qual dedueix l'exponencial	Generalment coordenades ortogonals (però també per a qualsevol angle). Coordenades des d'un punt
Bézout	– Algèbriques – Sinus, cosinus – Logarítmica, de la qual dedueix l'exponencial	Generalment coordenades ortogonals per simplicitat
Lagrange	Desenvolupables en sèrie de potències: algèbriques, sinus, cosinus, exponencial (de la qual dedueix la logarítmica)	No especifica coordenades («si $x$ , $y$ són les coordenades de la corba proposada...»)
Lacroix	Desenvolupables en sèrie de potències: algèbriques, circulars, exponencial (de la qual dedueix la logarítmica); o per via d'equacions diferencials (cicloide, espirals)	Generalment coordenades ortogonals. Canvi ortogonals-polars
<b>Problemes i aplicacions</b>		
L'Hôpital	Tangents, màxims i mínims, punts d'inflexió i retrocés, evolutes, càustiques... problemes usuals al segle XVII	
Reyneau	Problemes de geometria composta. Problemes fisicomatemàtics: 1) resolució per via del càlcul diferencial (tangents, màxims i mínims, punts d'inflexió, evolutes); 2) resolució començant pel càlcul diferencial i acabant pel càlcul integral (rectificació, quadratures, centres de gravetat)	
Bézout	Problemes fisicomatemàtics i geomètrics	
Lagrange	Corbes osculadores. Teoria de corbes. Teoria dels moviments variats. Equacions diferencials	
Lacroix	Màxims i mínims. Teoria de corbes. Corbes osculadores. Teoria de corbes de doble curvatura i de les superfícies corbes. Equacions diferencials	

### Llenguatge utilitzat (geomètric/algèbric)

La referència de L'Hôpital, Reyneau i Bézout és la geometria grega. Fins i tot Reyneau parla del moviment com a generador de les corbes. Tanmateix, Reynau i Bézout fan servir sèries com a eina auxiliar a l'hora d'integrar. El llenguatge de les *Leçons* de Lagrange és algèbric («analític»). L'objecte del càlcul de funcions és el mateix que el del càlcul diferencial, però a més a més serveix per relacionar el càlcul diferencial amb l'àlgebra. L'àlgebra (funcions resultants d'operacions aritmètiques) es pot considerar com a ciència de les funcions resultants del desenvolupament en sèrie. Les funcions derivades són objectes que obedeixen determinades lleis algèbriques. Quant a Lacroix, la motivació original del càlcul diferencial és geomètrica; Lacroix també parla del moviment continu generador de corbes. No obstant, el seu llenguatge és bàsicament algèbric, ja que utilitza funcions, sèries de Taylor, límit...

### Conclusió

La discussió generada a l'entorn del càlcul diferencial en el segle XVIII, així com els diversos sistemes educatius, va influir en els llibres de text francesos sobre càlcul diferencial de l'època. El text de L'Hôpital no presenta un intent de fonamentació rigorosa del càlcul diferencial, sinó que mostra com, amb ell, es poden solucionar de manera satisfactòria problemes del segle XVII lligats a la geometria. En canvi, el text de Reyneau, publicat després del debat Rolle-Varignon, ja presenta un intent de justificació de l'existència dels infiniment petits i de les diferències d'ordre superior com a defensa contra les crítiques de Rolle. El *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie* de Bézout és una de les diverses reedicions del seu *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* (1764-1769). Tot i que la publicació d'aquesta primera versió és posterior a 1748, en què apareix l'*Introductio in Analysin Infinitorum* d'Euler, Bézout no parla de funcions i el seu tractament del càlcul és molt semblant al de L'Hôpital i Reyneau. Els textos de Lagrange i Lacroix són *livres élémentaires* basats en tractats superiors. L'objectiu de Lagrange és tractar amb objectes algèbrics i evitar d'aquesta manera el problema de la fonamentació del càlcul diferencial. Per a Lacroix l'objecte fonamental del càlcul diferencial és límit de la raó dels increments d'una funció i de la variable de la qual depèn. Finalment, els llibres de Bézout, Lagrange i Lacroix presenten moltes aplicacions matemàticofísiques del càlcul diferencial, en consonància amb la tradició enginyera francesa.

### Bibliografia

#### *Fonts primàries*

- BÉZOUT, E. (1799). *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie*. París.  
 D'ALEMBERT, J. L.; DIDEROT, D. (1751-1772). *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. París.

- LACROIX, S. F. (1797-1800). *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*. París.  
[Traducció a l'alemany de la segona edició per part de P. GRÜSON (1799), *Lehrbegriff des Differential und Integralscalculus*]
- (1802). *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. París.
- LAGRANGE, J. L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques*. París.
- (1800). *Leçons sur le calcul des fonctions*. París.
- L'HÔPITAL, G. F. A. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. París.
- REYNEAU, C. R. (1708). *Analyse démontrée, ou la methode de resoudre les problemes des mathematiques et d'apprendre facilement ces sciences*. París.

### Fonts secundàries

- BLAY, M. (1986). «Deux moments de la critiques du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley». *Revue d'Histoire des Sciences*, 39, 223-253.
- BOS, H. (1974). «Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus». *Archive for the History of Exact Sciences*, 14, 1-90.
- (1993). «The Fundamental Concepts of the Leibnizian Calculus». *Lectures in the History of Mathematics*. American Mathematical Society, 83-99.
- BOYER, C. B. (1946). «The First Calculus Textbooks». *The Mathematics Teacher*, 34 (abril), 159-167.
- (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Nova York: Dover.
- BROCKLISS, L. B. (1987). *French Higher Education in the Seventeenth and Eighteenth Centuries*. Oxford: Clarendon Press.
- GILLIES, D. (1992). «The Fregean Revolution in Logic». A: GILLIES, D. [ed.]. *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 265-305.
- GRATTAN-GUINNESS, I. (1990). *Convolutions in French Mathematics*. Basilea: Birkhäuser.
- KHUN, T. S. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press. [Traducció castellana d'Agustín CONTÍN (1971), *La estrucutra de las revoluciones científicas*, Madrid, Fondo de Cultura Económica]
- SCHUBRING, G. (1987). «On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author». *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 41-51. [Traducció castellana de Rodrigo CAMBRAY NÚÑEZ, revisada per Alejandro GARCADIAGO (1992), «Sobre la metodología de análisis de libros de texto históricos: Lacroix como autor de libros de texto», *Mathesis*, 8 (3), 273-298]
- (1996). «Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in nineteenth-century Europe». A: GOLDSTEIN [et al.] [ed.]. *Mathematical Europe. Myth, History, Identity*. París: Maison des Sciences de l'Homme, 363-388.
- (1997). *Analysis of Historical Textbooks in Mathematics (Lecture Notes)*. Rio de Janeiro: Pontificia Universidade Católica.